Комплексный анализ, семинар 1 10.02.2012

1. 1) Докажите, что при стереографической проекции окружности и прямые на комплексной плоскости отображаются в окружности на сфере Римана.

2) Используя стереографическую проекцию, представьте вещественное трехмерное пространство в виде объединения непересекающихся окружностей.

2. 1) Докажите, что ряд $\exp(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ сходится для всех $z \in \mathbb{C}$.

2) Докажите, что $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ для $z, w \in \mathbb{C}$.

3) Докажите, что $\exp(a+bi) = \exp(a)(\cos b + i \sin b)$ для $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Выведите уравнения Коши-Римана для отображения $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x,y) = r(x,y)e^{i\varphi(x,y)}$, где $r(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ – вещественнозначные дифференцируемые функции двух переменных.

4. 1) Выразите $\operatorname{arctg} z$, используя комплексные числа, $\ln z$ и арифметические действия. В какой области может быть определена данная функция?

2) Выразите $\arccos z$, используя комплексные числа, $\ln z$, $\sqrt{z}$ и арифметические действия. В какой области может быть определена данная функция?

5. 1) Покажите, что множество всех дробно-линейных отображений, то есть, отображений вида $f(z) = (az+b)/(cz+d)$, $ad - bc \neq 0$, образует некоммутативную группу относительно операции композиции отображений.

2) Докажите, что произвольное дробно-линейное отображение преобразует любую окружность на сфере Римана в некоторую (вообще говоря) другую окружность.

6. Для каждого из следующих свойств приведите пример степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, имеющего единичный радиус сходимости и обладающего данным свойством:

1) Ряд сходится всюду на окружности $\{|z| = 1\}$.

2) Ряд расходится ровно в n точках на окружности $\{|z| = 1\}$, $n > 0$.

3) Ряд расходится в счетном множестве точек на окружности $\{|z| = 1\}$.

4) Ряд расходится всюду на окружности $\{|z| = 1\}$.